26/2/2016

Ισοπεριμετρική ανισότητα

Για κάθε απλή κλειστή καμπύλη μήκους L ισχύει $L^2 \geq 4\pi A$ όπου A είναι το εμβαδόν του εσωτερικού της. Επιπλέον η ισότητα ισχύει αν η c είναι κύκλος.

Σειρές Fourier

Αν I διάστημα $\subseteq \mathbb{R}$, $V = C(I)$ = σύνολο συνεχών συναρτήσεων $f: I \to \mathbb{R}$ είναι $\mathbb{R}$ διανυσματικός χώρος με εσωτερικό γινόμενο εσωτερικό γινόμενο $(f,g) = \int_I fg$, $\|f\| = \sqrt{(f,f)} = \left(\int_I f^2\right)^{1/2}$

Ορθομοναδιαίες βάσεις : $\dfrac{\cos(nx)}{\sqrt{2\pi}}$, $\dfrac{\sin(nx)}{\sqrt{2\pi}}$

$n \geq 0$ $\qquad$ $n > 0$

Αν f 2π-περιοδική : $\int_0^{2\pi} f(x)\,dx = 0$

Τότε $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)\right)$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos(nx)\,dx$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cdot \sin(nx)\,dx$$

$$\|f\|^2 = \frac{1}{\pi} \left(\sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) \right)$$

<u>Λήμμα (Wirtinger)</u>: Αν f 2π-περιοδική με $\int_0^{2\pi} f(x)\,dx = 0$ τότε $\int_0^{2\pi} (f'(x))^2\,dx \geq \int_0^{2\pi} f^2(x)\,dx$ και η ισότητα ισχύει μόνο αν $f(x) = a\cos x + b\sin x$ όπου a, b σταθερές

<u>Απόδειξη</u>: $\|f\|^2 = \frac{1}{\pi} \left(\sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) \right)$

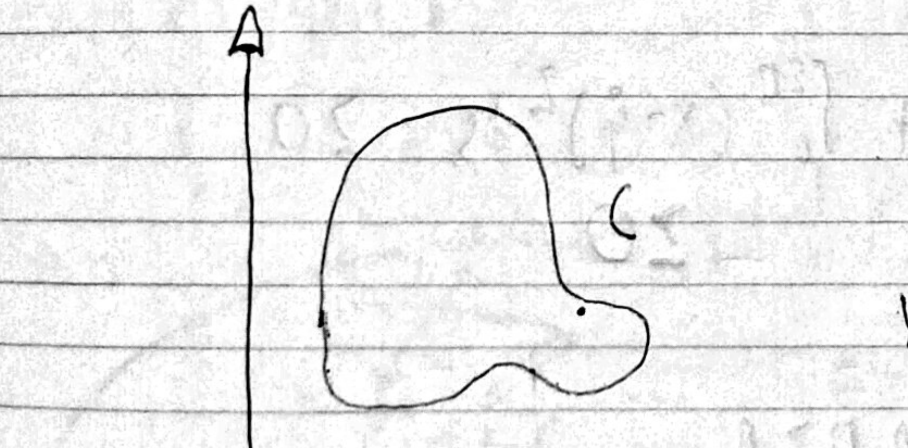
$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n\left(-a_n \sin(nx) + b_n \cos(nx)\right)$$

Τότε $\|f'\|^2 = \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} n^2(a_n^2+b_n^2)$

Αν $\int_0^{2\pi}(f'(x))^2\,dx - \int_0^{2\pi} f^2(x)\,dx = \|f'\|^2 - \|f\|^2$

$$= \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} (n^2-1)(a_n^2+b_n^2) \geq 0$$

<u>Απόδειξη</u> ισοπεριμετρικής ανισότητας βασιζόμενη στο λήμμα και στις σειρές Fourier:



Έστω $L=2\pi$
αν C έχει παράμετρο το μήκος τόξου
άρα $C(s) = (x(s), y(s))$
Υποθέτω ότι:
$\int_0^{2\pi} x(s)\,ds = \int_0^{2\pi} y(s)\,ds = 0$

Επίσης $L = 2\pi =$

$$= \int_0^{2\pi}\sqrt{(\dot{x}(s))^2+(\dot{y}(s))^2}\,ds$$

Θέτω $A = \int_0^{2\pi} x(s)\,\dot{y}(s)\,ds$

Θέλω να δείξω ότι $L^2 \geq 4\pi A \Rightarrow 4\pi^2 \geq 4\pi A$

$\Rightarrow A \leq \pi$

Τότε $\pi - A = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (\dot{x}(s))^2 + (\dot{y}(s))^2 \, ds - \int_0^{2\pi} x(s)\,\dot{y}(s)\, ds$

Από Λήμμα έχουμε ότι: $\int_0^{2\pi} (\dot{x})^2 ds \geq \int_0^{2\pi} x^2(s)\, ds \quad (1)$

και $\int_0^{2\pi} (\dot{y})^2 ds \geq \int_0^{2\pi} y^2(s)\, ds \quad (2)$

Τότε $2(\pi - A) = \int_0^{2\pi} \left[(\dot{x})^2 + (\dot{y})^2 - 2x\dot{y} \right] ds$

$= \int_0^{2\pi} (\dot{x})^2 + \underline{(\dot{y})^2} + \underline{x^2} - x^2 \underline{- 2x\dot{y}}$

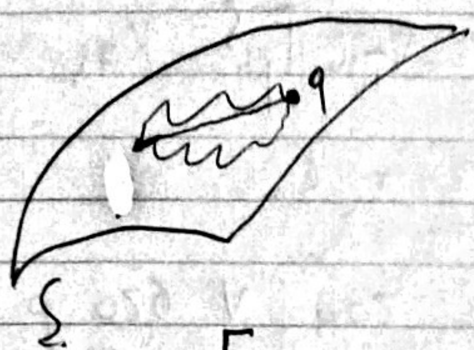
$= \underbrace{\int_0^{2\pi} \left((\dot{x})^2 - x^2 \right) ds}_{\geq 0 \text{ (Από (1))}} + \underbrace{\int_0^{2\pi} (x - \dot{y})^2 ds}_{\geq 0} \geq 0$

Άρα $\pi - A \geq 0 \Rightarrow \pi \geq A$

Επιφάνειες

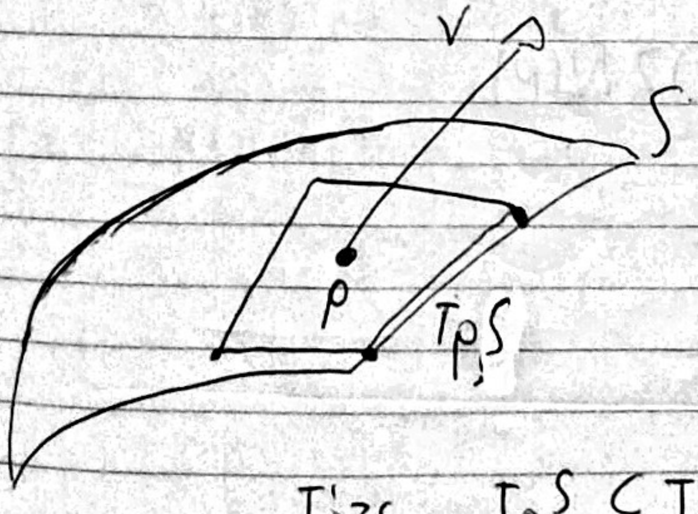
Πρόβλημα: Έστω S κανονική επιφάνεια του $\mathbb{R}^3$

Δίνονται σημεία p, q



Υπάρχει μεταξύ όλων των καμπυλών της S με άκρα p, q καμπύλη με το μικρότερο μήκος

Για το επίπεδο μια λύση είναι η ευθεία



Αν διάνυσμα του $\mathbb{R}^3$ με αφετηρία p δηλαδή $v \in T_p\mathbb{R}^3$

Τότε $T_pS \subseteq T_p\mathbb{R}^3$

Άρα $\underbrace{T_p\mathbb{R}^3}_{3} = \underbrace{T_pS}_{2} \oplus \underbrace{(T_pS)^{\perp}}_{1}$

κάθετη ευθεία

Αν $N: S \to S^2$ είναι η απεικόνιση Gauss τότε $N(p)$ βάση του $(T_pS)^{\perp}$

Το v γράφεται κατά μοναδικό τρόπο ως εξής: $v = v_T + v_{\perp}$, όπου $v_T \in T_pS$ και $v_{\perp} \in (T_pS)$.

v_T = εφαπτομενική συνιστώσα του v στο p

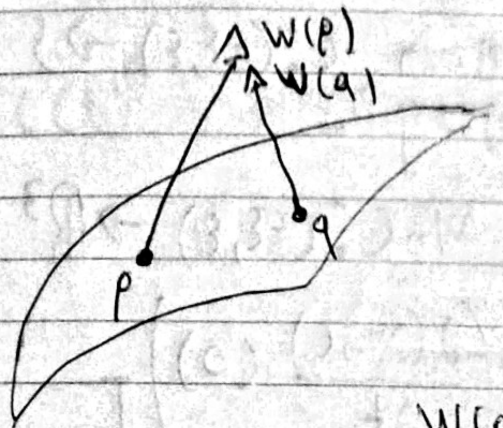
Ενώ $v_{\perp}$ = κάθετη συνιστώσα του v στο p

$$v_{\perp} = \langle v_{\perp}, N(p) \rangle N(p) = \langle v, N(p) \rangle N(p)$$

Άρα $v = v_T + \langle v, N(p) \rangle N(p)$

Διανυσματικά πεδία σε επιφάνεια

Ορισμός: Ένα διανυσματικό πεδίο W σε μια επιφάνεια S είναι μια απεικόνιση $W: S \to \mathbb{R}^3$ η οποία είναι λεία



Το W καλείται εφαπτόμενο στην επιφάνεια αν-ν $W(p) \in T_pS$, $\forall p \in S$

$$W(p) = (W(p))_T + \langle W(p), N(p) \rangle N(p) \quad \forall p$$

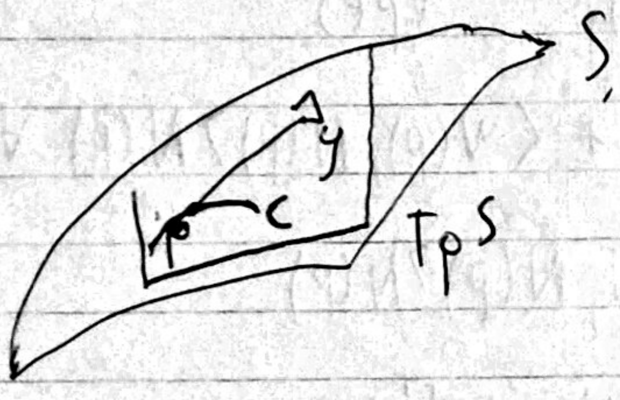
και $W = W_T + \langle W, N(p) \rangle N(p)$

Άρα W_T λείο διανυσματικό πεδίο.

Συναλλοίωτη παράγωγος εφαπτομενικών διανυσματικών πεδίων

<u>Ορισμός:</u> Έστω S κανονική επιφάνεια, W εφαπτομενικό διανυσματικό πεδίο, $p \in S$ και $y \in T_pS$. Θεωρώ καμπύλη $c: (-\varepsilon, \varepsilon) \to S$ με $c(0) = p$, $c'(0) = y$.

Τότε $W \circ c : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}^3$



Τότε $\left(\dfrac{\partial (W \circ c)}{\partial t}(0)\right)_T$

καλείται συναλλοίωτη παράγωγος του W ως προς την εφαπτομενική διεύθυνση y στο p

και συμβολίζεται με: $D_y W(p) = \left(\dfrac{\partial (W \circ c)}{\partial t}(0)\right)_T$

$$= \frac{\partial (W \circ c)}{\partial t}(0) - \left\langle \frac{\partial (W \circ c)}{\partial t}(0), N(p) \right\rangle N(p)$$

Θεωρούμε ένα σύστημα συντεταγμένων

$X: U \to S$ με $p \in X(U)$

Τότε $c(t) = X(u(t), v(t))$, όμως $W \circ X : U \to \mathbb{R}^2$

Όμως $\{X_u, X_v\}$ βάση άρα $W \circ X = a X_u + b X_v$

με $a, b : U \to \mathbb{R}$ λείες

$$W \circ c(t) = W(X(u(t), v(t)) = \overbrace{a(u(t), v(t))}^{a(t)} X_u(u(t), v(t))$$

$$+ \underbrace{b(u(t), v(t))}_{b(t)} X_v(u(t), v(t))$$

Τότε $\frac{\partial (W \circ c)}{\partial t} = a' X_u + a \{ u' X_{uu}(u(t), v(t)) + v'(t) X_{uv}(u, v) \}$

$$+ b \{ u' X_{uv}(u, v) + v' X_{vv}(u, v) \} + b' X_v$$

Όμως $X_{uu} = \Gamma_{11}^1 X_u + \Gamma_{11}^2 X_v + eN$

$$\frac{D W}{dt}(p) = a'(0) X_u + a \{ u'(0) (\Gamma_{11}^1 X_u + \Gamma_{11}^2 X_v)$$

$$+ v'(0) (\Gamma_{12}^1 X_u + \Gamma_{12}^2 X_v) \} + b'(0) X_v$$

$$+ b \{ u'(0) (\Gamma_{12}^1 X_u + \Gamma_{12}^2 X_v) + v'(0) (\Gamma_{12}^1 X_u + \Gamma_{22}^2 X_v) \}$$

$$w(p) = \{ a' + \Gamma^1_{11} a u' + \Gamma^1_{12} a v' + \Gamma^1_{12} b u' + \Gamma^1_{22} b v' \} X_u$$

$$+ \{ b' + \Gamma^2_{11} a u' + \Gamma^2_{12} a v' + \Gamma^2_{12} b u' + \Gamma^2_{22} b v' \} X_v.$$

$y = c'(0) = u'(0) X_u + v'(0) X_v$. Άρα ο ορισμός είναι ανεξάρτητος της καμπύλης c. Όμως τα σύμβολα Cristoffel εξαρτώνται από την 1η Θεμελιώδη Μορφή. Άρα η συναλλοίωτη παράγωγος εξαρτάται από την 1η Θεμελιώδη μορφή